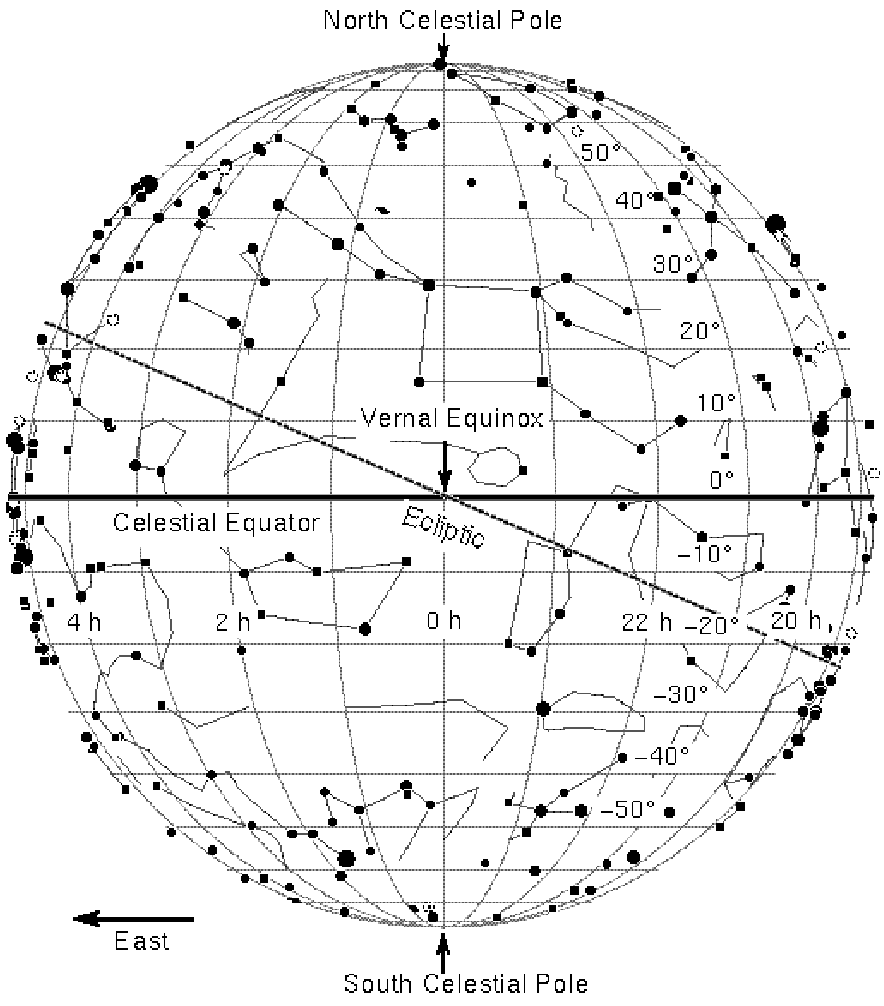
نجوم و اخترفیزیک مقدماتی



نجوم کروی و موقعیت‌یابی در آسمان

حسین مصحفی

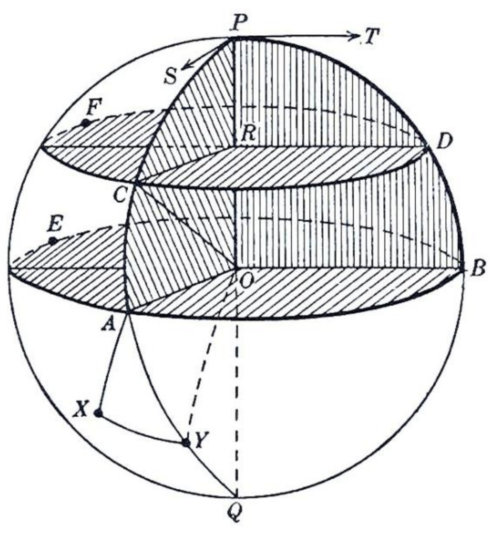
«هوالحبیب»

نجوم کروی و موقعیت‌یابی

مثلثات کروی

وقتی شب‌ها به آسمان می‌نگریم ستاره‌ها را به صورت نقاط درخشانی می‌بینیم که ظاهراً بر سطح کرهٔ بزرگی قرار گرفته‌اند و ما در مرکز این کره هستیم. البتّه نمی‌توانیم با چشم فاصلهٔ ستاره‌ها را از خودمان تعیین کنیم ولی می‌شود اندازهٔ زاویه‌ای را که هر دو ستاره در محل راصد با یکدیگر تشکیل می‌دهند، تعیین کرد. در نجوم کروی جهت‌هایی را بررسی می‌کنند که ستاره‌ها در امتداد آن‌ها مشاهده می‌شوند؛ این جهت‌ها محل تقاطع خطوط راست واصل بین راصد و ستاره‌ها با سطح کره‌ای موسوم به کرهٔ سماوی به شمار می‌آیند. عبارت «مکان یک ستاره روی کرهٔ سماوی» باید به همین معنی تعبیر شود. شعاع این کره کاملاً اختیاری است. اساس نجوم کروی هندسهٔ این کره است.

هر صفحه‌ای که از مرکز کره عبور کند سطح آن را در دایره‌ای موسوم به **دایرهٔ عظیمه** قطع می‌کند. هر صفحه‌ای که کره را قطع کند ولی از مرکز این کره عبور نکند نیز سطح کره را در دایره‌ای قطع می‌کند که **دایرهٔ صغیره** نامیده می‌شود. EAB، در شکل 1 یک دایرهٔ عظیمه است، زیرا صفحهٔ آن از نقطهٔ O که از مرکز کره است می‌گذرد. فرض کنید QOP قطری از کره باشد که بر صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ EAB عمود است.



تصویر 1

هم‌چنین نقطهٔ دلخواه R را روی شعاع OP در نظر بگیرید و فرض کنید صفحه‌ای از آن نقطه به موازات EAB رسم شده باشد؛ در این صورت،سطح کره در دایرهٔ صغیره FCD قطع می‌شود. از روی شکل پیداست که OP بر صفحهٔ FCD نیز عمود است. دو سر عمود مشترک QOP ، یعنی P و Q، را **قطب‌های دایرهٔ عظیمه** و دایرهٔ صغیره موازی با آن می‌نامند. اکنون فرض کنید دایرهٔ عظیمهٔ دلخواهی مانند PCAQ از قطب‌های P و Q عبور کند و دایرهٔ صغیرهٔ FCD و دایرهٔ عظیمهٔ EAB را به ترتیب در نقاط C و A قطع کند. همین‌طور، کمان PDB قسمتی از دایرهٔ عظیمهٔ دیگری است که از P و Q می‌گذرد. وقتی

می‌خواهیم یک دایرهٔ عظیمهٔ بخصوصی را نام ببریم، ساده‌تر آن است که تنها قسمتی از محیط آن را نام ببریم. وقتی که دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند می‌گوییم میان آن‌ها یک **زاویهٔ کروی** تشکیل می‌شود که تعریف آن به شرح زیر است. دو دایرهٔ عظیمهٔ PA و PB که همدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند در نظر می‌گیریم. خطوط PS و PT را به ترتیب مماس بر محیط دایره‌های PA و PB رسم می‌کنیم. بدیهی است که خط PT بر شعاع OP از دایرهٔ عظیمهٔ PB عمود است و چون در صفحهٔ POB است بنابراین با شعاع OB موازی است. همین‌طور، PS با شعاع OA موازی است. زاویهٔ SPT بنا به تعریف زاویهٔ کروی میان دو دایرهٔ عظیمهٔ PA و PB است و با زاویهٔ AOB برابر است. کمان رو به روی این زاویه، AB، که دایره‌های عظیمهٔ PA و PB است و با زاویهٔ AOB برابر است. کمان روبه روی این زاویه، AB، که دایره‌های عظیمهٔ PA و PB را قطع می‌کند بخشی از دایرهٔ عظیمه‌ای به قطب P است. باید تأکید کرد که *زاویهٔ کروی تنها در ارتباط با دو دایرهٔ عظیمه تعریف می‌شود.*

اگر سه نقطهٔ دلخواه روی یک کره داشته باشیم می‌توانیم کره را طوری دو نیم کنیم که هر سه نقطه روی یک نیمکره باشند. اگر این نقاط با کمان‌های دایرهٔ عظیمه که همه روی یک نیمکره قرار دارند به هم وصل شوند، شکل حاصل یک *مثلث کروی* خوانده می‌شود. بدین ترتیب در شکل 1، سه نقطهٔ A، X و Y واقع بر سطح کره با کمان‌های دایرهٔ عظیمه به هم وصل می‌شوند و مثلث کروی AXY را تشکیل می‌دهند. AX ، AY و XY اضلاع این مثلث و زاویه‌های کروی A، X و Y زاویه‌های آن هستند. در واقع، اگر R شعاع کره باشد آن وقت AY طول کمان دایرهٔ عظیمه، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$AY = R\times(A\hat{O}Y)$$

که در آن زاویهٔ AOY بر حسب مقیاس دایره‌ای، یعنی رادیان بیان می‌شود. چون برای همهٔ کمان‌های دایرهٔ عظیمهٔ واقع بر کره، شعاع R مقداری ثابت است، بنابراین بهتر است که طول آن واحد اختیار شود. در این صورت طول کمان AY صرفاً برابر زاویهٔ مرکزی مقابل آن است. برای مثال، اگر AY برابر یک هشتم محیط دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از نقاط A و Y می‌گذرد، آن‌گاه ضلع AY برابر $\pi/4$ رادیان است و هیچ ابهامی وجود نخواهد داشت اگر طول آن را به درجه بیان کنیم، یعنی بگوییم 45^{o} است. اضلاع دیگر مثلث را نیز می‌توان به همین ترتیب بیان کرد. از تعریف مثلث کروی چنین نتیجه می‌شود که هیچ ضلعی نمی‌تواند مساوی یا بزرگ‌تر از 180^{o} باشد. به عنوان مثالی دیگر، PAB یک مثلث کروی است که دو ضلع آن، یعنی کمان‌های PA و PB ، هر یک مقابل یک زاویهٔ $\pi/2$ رادیان است که رأس آن‌ها در نقطهٔ O قرار دارند؛ در این حالت گوییم که PA و PB هر یک برابر $\pi/2$ رادیان است. امّا PCD یک مثلث کروی نیست، زیرا کمان CD بخشی از یک دایرهٔ عظیمه نیست. بنابراین رابطه‌هایی که برای مثلث‌های کروی به دست می‌آیند در شکل‌هایی مانند PCD کاربردی نخواهند داشت.

طول کمان دایرهٔ صغیره

در شکل 1، کمان CD از دایرهٔ صغیره را در نظر بگیرید. طول آن از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$CD = RC\times(CRD)$$

هم‌چنین طول کمان دایرهٔ عظیمهٔ AB از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$AB = OA\times(A\hat{O}B)$$

امّا چون صفحه‌های FCD و EAB موازی‌اند، پس $CRD = A\hat{O}B$، زیرا RC و RD به ترتیب با OA و OB موازی‌اند. بنابراین داریم:

$$CD = (RC/OA)\times AB$$

امّا چون OA = OC (هر دو شعاع کره‌اند)، پس داریم:

$$CD=RC/OC\times AB$$

حال RC بر OR عمود است، بنابراین $RC=OC\ cos\ R\hat{C}O$. از موازی بودن RC و OA نتیجه می‌شود که $R\hat{C}O = A\hat{O}C$. از این رو داریم:

$$CD=AB\ cos\ A\hat{O}C$$

چون زاویهٔ مرکزی AOC مقابل کمان AC از دایرهٔ عظیمه است، بنابراین رابطهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{CD=AB}\ \boldsymbol{cos}\ \mathbf{AC}$$

یا، چون $PA = 90^o$ است

$$\mathbf{CD=AB}\ \boldsymbol{cos}\ \mathbf{PC}$$

فرمول کسینوس

فرض می‌کنیم ABC یک مثلث کروی باشد (تصویر2). اضلاع CA،BC و AB را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. بنابراین، طبق تعریف، ضلع a با زاویهٔ مرکزی BOC که مقابل کمان دایرهٔ عظیمهٔ BC است اندازه گرفته می‌شود. همین‌طور، b و c به ترتیب با زاویه‌های AOC و AOB اندازه‌گیری می‌شوند. اگر AD مماس بر دایرهٔ عظیمهٔ AB در نقطهٔ A و AE مماس بر دایرهٔ عظیمهٔ AC در همان نقطه باشد، آن‌گاه شعاع OA بر AD و AE عمود خواهد بود. واضح است که، AD در صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ AB قرار دارد؛ از این‌رو، اگر شعاع OB امتداد داده شود مماس AD را در نقطهٔ D قطع خواهد کرد. به همین ترتیب، امتداد شعاع OC مماس AE را در نقطهٔ E قطع می‌کند. زاویهٔ کروی BAC بنا به تعریف زاویه‌ای است که بین مماس‌های رسم شده در نقطهٔ A، بر دایره‌های عظیمهٔ AB و AC ، تشکیل می‌شود پس $B\hat{A}C = D\hat{A}E$ است. زاویهٔ کروی BAC صرفاً با A نشان داده خواهد شد، بنابراین $D\hat{A}E=A$ است.

حال، در مثلث مسطح OAD، زاویهٔ $O\hat{A}D$ برابر 90^o است و $A\hat{O}D$ مساوی $A\hat{O}B$ و برابر c است. بنابراین داریم:

$$AD=OA\ tan\ c \qquad OD=OA\ sec\ c$$

به همین ترتیب، از مثلث مسطح OAE می‌توان نوشت:

$$AE=OA\ tan\ b \qquad OE=OA\ sec\ b$$

از مثلث مسطح DAE داریم:

$$DE^2=AD^2+AE^2 - 2AD\times AE\ cos\ D\hat{A}E$$

یا

$$DE^2=OA^2[tab^2\ c + tan^2\ b - 2tan\ b\ tan\ c\ cos\ A] \qquad (*)$$

از مثلث مسطح DOE می‌توان نوشت:

$$DE^2=OD^2+OE^2-2OD\times OE\cos D\hat{O}E$$

امّا $D\hat{O}E=B\hat{O}C=a$ است؛ بنابراین:

$$DE^2=OA^2[\sec^2 c+\sec^2 b-2\sec b\sec c\cos a] \qquad (**)$$

بدین ترتیب، از روابط (*)و(**) داریم:

$$\sec^2 c+\sec^2 b-2\sec b\sec c\cos a=\tan^2 c+\tan^2 b-2\tan b\tan c\cos A$$

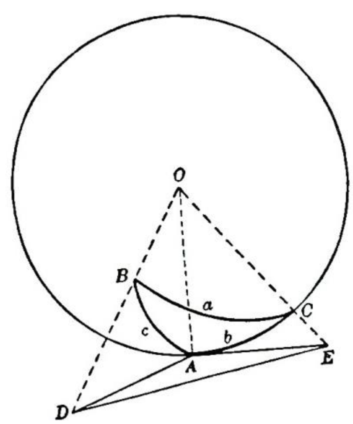
چون $\sec^2 c=1+\tan^2 c$ و $\sec^2 b=1+\tan^2 b$ است پس از ساده کردن، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

این رابطه، رابطهٔ بنیادی مثلثات کروی است و تحت عنوان **فرمول کسینوس** از آن یاد می‌شود. دو فرمول مشابه دیگر برای دیگر زوایا وجود دارد:

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$



تصویر 2

فرمول قیاسی

معادله بدست آمده در قسمت قبل را به شکل زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$\sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos c\cos a$$
$$=\cos b-\cos c(\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A)$$
$$=\sin^2 c\cos b-\sin b\sin c\cos c\cos A$$

با تقسیم رابطهٔ بالا بر $\sin c$، خواهیم داشت:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

فرمول هاورسینوس

بسیاری از محاسبات با به کاربردن «هاورسینوس» به طور قابل توجّهی کوتاه‌تر می‌شوند. *هاورسینوس* زاویه θ (که به صورت $hav\ \theta$ نوشته می‌شود) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$hav\ \theta = ½ (1-\cos \theta) = \sin^2 \theta/2$$

چون $\cos \theta = 1-2\sin^2 \theta/2$ است، داریم:

$$\cos \theta = 1-2hav\ \theta$$

اکنون می‌توانیم رابطهٔ کسینوس را به شکل دیگری بنویسیم:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos a = 1-2hav\ a\ , \cos A = 1-2hav\ A$$

$$1-2hav\ a = \cos(b-c) - 2\sin b \sin c\ hav\ A$$

$$\cos(b-c) = 1-2hav(b-c)$$

$$hav\ a = hav(b-c) + \sin b \sin c\ hav\ A$$

این شکل دیگری از رابطه اساسی مثلثات کروی است که به صورت هاورسینوس بیان شده است.

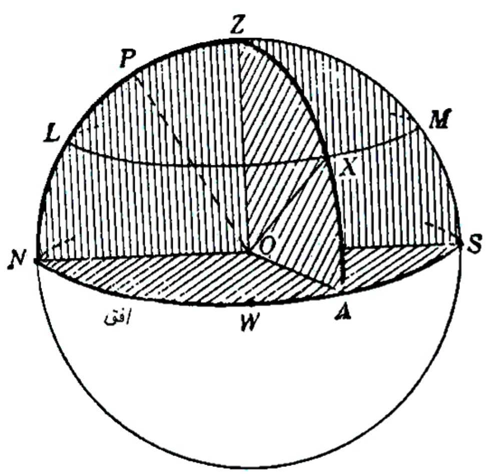
کرهٔ سماوی

ارتفاع و سمت

فرض کنید O که مکان راصد بر روی زمین است مرکز کرهٔ سماوی است (تصویر 3 را نگاه کنید). هم‌چنین فرض کنید Z (سمت‌الرأس) نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی باشد که به طور قائم بالای سر راصد است. جهت این نقطه را می‌توان به کمک خط شاغولی تعریف کرد، بدین ترتیب که OZ ادامهٔ این خط راست است که مرکز زمین را به نقطهٔ O وصل می‌کند. صفحه‌ای که از O می‌گذرد و بر OZ عمود است صفحهٔ افق است. این صفحه کرهٔ سماوی را در دایرهٔ عظیمهٔ NAS که افق سماوی یا افق خوانده می‌شود، قطع می‌کند. بدین ترتیب، در تصویر زیر، کرهٔ سماوی را به دو نیم‌کره تقسیم می‌کند که نیم‌کرهٔ بالایی مرئی است و نیم‌کرهٔ پایینی به وسیلهٔ زمین از دید راصد پنهان می‌شود. فرض کنید در لحظه‌ای معین، X مکان ستاره‌ای روی کرهٔ سماوی باشد. هر دایرهٔ عظیمه‌ای که از Z رسم شود *دایرهٔ قائم* نامیده می‌شود. در شکل دایرهٔ قائمی که از X می‌گذرد ZXA است. در صفحهٔ ZXA، زاویهٔ AOX یا کمان AX از دایرهٔ عظیمه را ارتفاع X می‌نامیم و با a نشان می‌دهیم. چون OZ بر صفحهٔ افق عمود است، یعنی کمان دایرهٔ عظیمهٔ ZA برابر 90^0 است، داریم $ZX=90^0 - a$. کمان ZX **فاصلهٔ سمت‌الرأسی** (ZD) ستارهٔ X نامیده می‌شود و با z نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$z=90^0 - a$$

فرض کنید LXM دایرهٔ صغیره‌ای باشد که از X موازی افق می‌گذرد. این دایره موازی ارتفاع خوانده می‌شود و طوری است که همهٔ اجرام آسمانی که مکان آن‌ها در لحظه‌ای معین روی این دایره صغیره است یک ارتفاع دارند و نیز، فاصله سمت‌الرأسی آن‌ها با فاصلهٔ سمت‌الرأسی X برابر است.

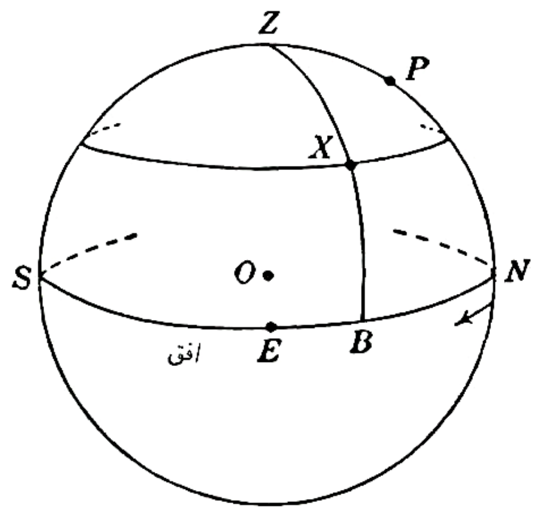


تصویر 3

بدین ترتیب اگر ارتفاع یا فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره‌ای در درست باشد، می‌توان موازی ارتفاعی را که ستاره باید روی آن قرار گیرد به طور قطع مشخص کرد. برای تعیین کامل مکان این ستاره روی کرهٔ سماوی، باید دایره قائم خاصی که ستاره روی آن قرار دارد نیز مشخص شود.

فرض کنید OP موازی محوری باشد که زمین حول آن می‌چرخد. اگر عرض جغرافیایی راصد، شمالی باشد (مانند تصویر بالا) مکان P، قطب شمال سماوی یا تنها قطب شمال نامیده می‌شود. ما چرخش زمین را به طور مستقیم حس نمی‌کنیم، بلکه اثر آن در چرخش ظاهری کرهٔ سماوی نمایان می‌شود. بدین ترتیب چنین به نظر می‌رسد که ستاره‌ها در آسمان حرکت می‌کنند و ارتفاع و جهت آن‌ها پیوسته در تغییر است. با این حال در نیم‌کرهٔ شمالی ستاره‌ای هست که با چشم غیر مسلح مرئی به نظر می‌رسد و مکان آن خیلی کم تغییر می‌کند. این ستاره جُدَی یا ستاره قطبی نام دارد و جهت آن در آسمان خیلی نزدیک به جهت OP است. اگر ستاره‌ای درست در نقطهٔ P روی کرهٔ سماوی بود، ارتفاع و جهت آن در طول شب تغییر نمی‌کرد. دایرهٔ قائمی که از نقطهٔ P یعنی از ZPN، (که افق را در نقطهٔ N قطع می‌کند) می‌گذرد دایرهٔ قائم اصلی، و نقطهٔ N نقطهٔ شمال افق تعریف می‌شود. نقطهٔ S که روی افق و درست روبه‌روی نقطهٔ N است به نقطهٔ جنوب موسوم است؛ جهت نقطّ غرب (W) و نقطهٔ شرق (E) به ترتیب بر جهت‌های N و S عمودند (نقطهٔ E در تصویر نشان داده نشده است). نقطه‌های N، E، S و W چهار جهت اصلی نامیده می‌شوند.

اکنون مکان ستارهٔ X روی کرهٔ سماوی را در لحظه‌ای معین نسبت به افق و دایرهٔ قائم اصلی ZPN مشخص می‌کنیم. اگر ستاره در بخش غربی کرهٔ سماوی باشد، زاویهٔ کروی PZX (که به وسیلهٔ دایرهٔ قائم اصلی و دایرهٔ قائم گذرنده از X ایجاد می‌شود) یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ NA را سمت غربی می‌نامند. اگر ستاره، مانند تصویر پایین در بخش غربی کرهٔ سماوی باشد زاویهٔ PZX یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ NB سمت (شرقی) خوانده می‌شود. بدین ترتیب مکان یک جرم آسمانی را روی کرهٔ سماوی می‌تواند در هر لحظه نسبت به افق و نقطهٔ شمال افق، بر حسب ارتفاع و سمت (شرقی یا غربی) یا بر حسب فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت به طور کامل مشخص کرد. وقتی سمت 90^o شرقی یا 90^o غربی باشد، گفته می‌شود ستاره روی قائم مبدأ است. پس قائم مبدأ دایرهٔ قائمی است که از نقطهٔ شرق (E) یا نقطهٔ غرب (W) می‌گذرد.



تصویر 4

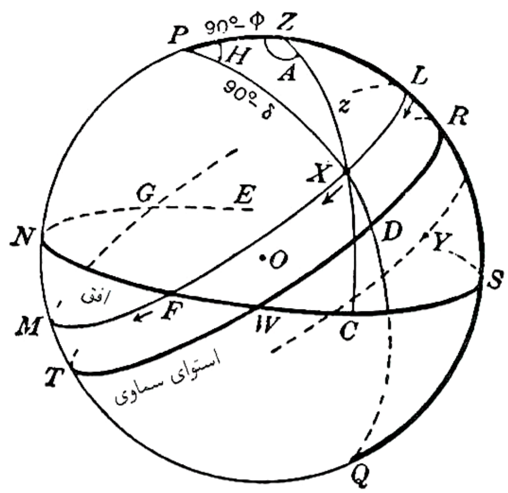
چون در تصاویر 3 و 4 زاویهٔ POZ (یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ PZ) با زاویه‌ای که شعاع زمین در مکان راصد و محور زمین با هم می‌سازند معادل است، PÔZ (یا PZ) با متمم عرض راصد برابر است:

$$PZ = 90^o - \Phi$$

که در آن Φ عرض جغرافیایی راصد است. هم‌چنین داریم $PN = 90^o - PZ = \Phi$. از این جهت ارتفاع قطب با عرض جغرافیایی راصد برابر است.

مِیل و زاویهٔ ساعتی

باز هم فرض کنید کرهٔ سماوی برای راصد O در عرض جغرافیایی Φ رسم می‌شود و در آن صفحهٔ افق، سمت‌الرأس Z، و قطب شمال P نمایش داده شود (تصویر 5 را بنگرید). دایرهٔ عظیمهٔ RWT که صفحهٔ آن عمود بر OP است استوای سماوی است و صفحهٔ آن آشکارا موازی صفحهٔ استوای زمین است. استوای سماوی و افق یکدیگر را در دو نقطهٔ W و E قطع می‌کنند. چون Z قطب دایرهٔ عظیمهٔ NWS و P قطب دایرهٔ عظیمهٔ RWT است، W از هر دو نقطهٔ Z و P به اندازهٔ 90^o فاصله دارد و بنابراین فاصلهٔ آن از همهٔ نقاط دایرهٔ عظیمه‌ای که از Z و P می‌گذرد 90^o فاصله دارد و بنابراین فاصلهٔ آن از همهٔ نقاط دایرهٔ عظیمه‌ای که از Z و P می‌گذرد 90^o است. به عبارت دیگر، W قطب دایرهٔ عظیمهٔ NPZSQ است و از این جهت داریم $NW=90^o$ و $WS=90^o$. به همین ترتیب $EN=90^o$ و $ES=90^o$ است. بنابراین W و E دو جهت دیگر از چهار جهت اصلی‌اند که جهات N و S آن قبلاً تعریف شده بود.



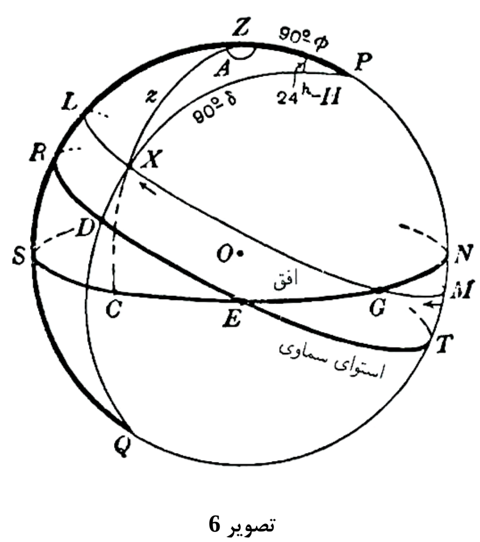
تصویر 5

چنان‌که پیش از این هم گفته شد چرخش زمین موجب چرخش ظاهری کرهٔ سماوی، به دورِ OP، از شرق به غرب می‌شود. چون ستاره‌ها در فاصله‌هایی بسیار دور از زمین قرار دارند در نتیجه زاویهٔ میان خط راست واصل بین راصد O و هر ستارهٔ ویژه و خط راست OP (موازی محور زمین) بدون تغییر می‌ماند. اگر به ستاره‌ای مانند X نگاه کنیم، به خاطر چرخش زمین، به نظر می‌رسد که این ستاره دایرهٔ صغیرهٔ LXM را موازی استوای سماوی در جهتی که در تصویر 5 با پیکان نشان داده شده است طی می‌کند. فرض کنید PXDQ نیم‌دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از X و قطب‌های کرهٔ سماوی می‌گذرد. در این صورت، کمان DX را ***مِیلِ ستاره*** می‌نامند. اگر ستاره‌ای (مثلاً X) بین اِستِوای سماوی و قطب شمال P باشد میل آن، میل شمالی و اگر (مثل Y) بین استوای سماوی و قطب جنوب Q باشد میل آن را میل جنوبی می‌نامند. بدین ترتیب میل یک ستاره به عرض جغرافیایی یک نقطه روی زمین می‌ماند که قبلاً تعریف شد. میل X را با δ نشان می‌دهیم، در این صورت داریم $DX = \delta$ و $PX=90^o-\delta$ است. PX فاصلهٔ قطبی شمالی (NPD) ستاره است. بهتر است میل را یک کمیت جبری تلقی کنیم تا روابط مختلفی که به‌دست می‌آوریم در مورد میل‌های شمالی و جنوبی به طور یک‌سان صادق باشند. میل‌های شمالی دارای علامت مثبت (+) و میل‌های

جنوبی دارای علامت منفی (-) هستند. بدین ترتیب، رابطهٔ فاصلهٔ قطبی شمالی، یعنی $NPD=90^o - \delta$ ، در مورد همهٔ ستاره‌ها، با هر میلی، صادق است.

با دانستن میل ستاره می‌توانیم دایرهٔ صغیره‌ای به نام **مدار سماوی** را که ستاره باید روی آن باشد مشخص کنیم. برای تعیین کامل مکان ستاره در هر لحظه روی کرهٔ سماوی به دایرهٔ عظیمهٔ دیگری به عنوان مرجع نیاز داریم. این نیاز را نیم‌دایرهٔ عظیمهٔ PZRSQ که دایرهٔ نصف‌النّهار راصد خوانده می‌شود برطرف می‌کند. هنگامی که ستاره در نقطهٔ L روی نصف‌النّهار راصد است، می‌گوییم که ستاره عبور می‌کند و از روی شکل 5 مشخص است که در این صورت ارتفاع ستاره (یعنی SL) بیشترین و فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن، یعنی ZL ، کم‌ترین مقدار است. از این پس ستاره، به دلیل چرخش زمین، در طول دایرهٔ صغیرهٔ LFM حرکت می‌کند و افق را در نقطهٔ F قطع می‌کند. در این حالت می‌گوییم که ستاره در این نقطه غروب می‌کند. بی‌شک ارتفاع ستاره در نقطهٔ F، صفر درجه و فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن 90^o است. ستاره در مدّتی که بستگی به میل آن دارد زیرِ افق می‌ماند و در M بیشترین انخفاض را در زیر افق خواهد داشت، و سرانجام در نقطهٔ G دوباره به افق می‌رسد و می‌گوییم که طلوع می‌کند. ارتفاع ستاره رفته رفته افزایش می‌یابد و ستاره پس از مدّتی که معادل زمان یک چرخش کامل زمین حول محور خود است، به نصف‌النّهار راصد در نقطهٔ L باز می‌گردد. در هر لحظه مکان ستاره روی مدار سماوی با زاویه‌ای در P بین دایرهٔ نصف‌النهار راصد و نصف‌النّهار (PXQ) که در همان لحظه از ستاره می‌گذرد مشخص می‌شود. این زاویه، یعنی RPX یا ZPX یا کمان RD روی استوا، با H نشان داده می‌شود و **زاویهٔ ساعتی** نام دارد و از دایرهٔ نصف‌النّهار راصد به طرف غرب از 0^o (در L) تا 360^o (هنگامی که ستاره به نصف‌النّهار راصد باز می‌گردد) یا از 0^h تا 24^h اندازه‌گیری می‌شود. این را می‌توانیم به روش متفاوتی بیان کنیم. هنگامی که ستاره در حال عبور است، دایرهٔ نصف‌النّهار آن بر دایرهٔ نصف‌النّهار راصد منطبق است؛ از آن پس، دایرهٔ نصف‌النّهار ستاره به طور یکنواخت به طرف غرب حرکت می‌کند و وقتی یک دور کامل از کرهٔ سماوی را به پایان رسانید یک زاویهٔ 360^o یا 24^h را نسبت به دایرهٔ نصف‌النّهار راصد پیموده است. از شکل 5 دیده می‌شود که اگر ستاره در غرب دایرهٔ نصف‌النّهار راصد باشد، یعنی اگر سمت آن غربی باشد، زاویهٔ ساعتی آن بین 0^o و 180^o یا بین 0^h و 12^h است. همین‌طور اگر (مانند تصویر 6) ستاره در شرق دایرهٔ نصف‌النّهار (در سمت شرقی) باشد زاویهٔ ساعتی آن بین 12^h و 24^h خواهد بود. بدین ترتیب می‌توانیم قاعده‌های زیر را بیان کنیم:

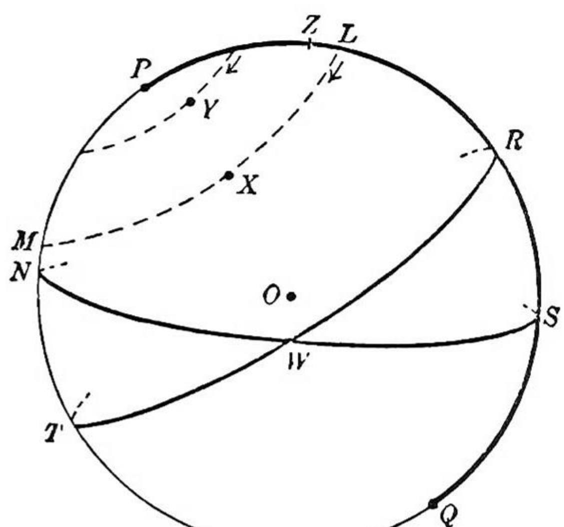
اگر سمت ستاره غربی باشد زاویهٔ ساعتی آن بین 0^h و 12^h خواهد بود (و برعکس)، اگر سمت ستاره شرقی باشد زاویهٔ ساعتی آن بین 12^h و 24^h است.



تصویر 6

ستاره‌های پیراقطبی

کرهٔ سماوی را برای راصدی در عرض جغرافیایی شمالیΦ در نظر می‌گیریم (تصویر7). در تصویر 7 مدارهای سماوی دو ستارهٔ X و Y ، *هر دو همواره بالای افق‌اند و در نتیجه غروب نمی‌کنند*، رسم شده‌اند. چنین ستاره‌هایی را ستاره‌های پیراقطبی می‌نامند. از تصویر 7 به سهولت می‌توان دید که شرط این‌که ستاره‌ای غروب نکند این است که PM از PN کوچک‌تر باشد؛ یعنی فاصلهٔ قطبی شمالی باید از عرض جغرافیایی کم‌تر، یا به عبارت دیگر، میل باید از متمم عرض بزرگ‌تر باشد. هنگامی که ستارهٔ X روی نصف‌النّهار راصد در L قرار دارد، در عبور بالاست؛ زمانی که ستاره به M می‌رسد، در عبور پایین است. اغلب عبارت‌های «عبور بالای قطب» و «عبور پایین قطب» به کار برده می‌شوند. فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره در عبور بالا برابر ZL یا (PL-PZ)، یعنی برابر Φ-δ است. فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره در عبور پایین برابر ZM یا (ZP+PM)، یعنی برابر 180^o-(Φ+δ) است. هنگامی که δ=Φ است، عبور بالا در سمت‌الرأس روی می‌دهد. وقتی $\delta > \Phi$ باشد عبور بالای یک ستاره، نظیر ستارهٔ Y، بین P و Z روی می‌دهد و در این صورت، به طوری که می‌توان به آسانی از نمودار نتیجه گرفت، سمت ستاره نمی‌تواند بیشتر از 90^o باشد. ستاره‌های پیراقطبی جنوبی را می‌توان به همین روش بررسی کرد.

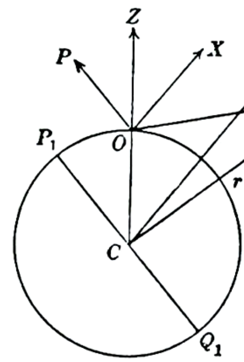


تصویر 7

کرهٔ سماوی استاندارد یا زمین- مرکز

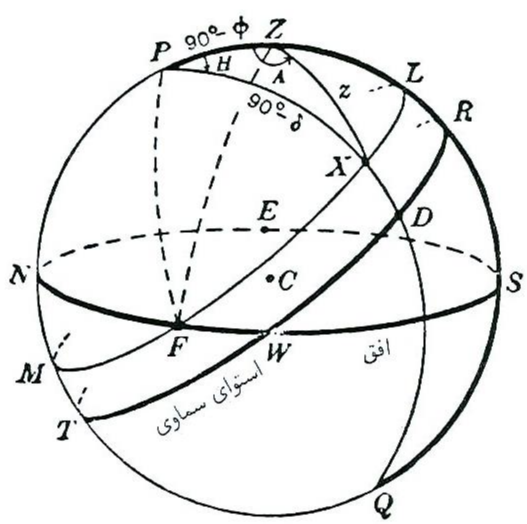
در بخش‌های قبل، میلِ یک ستاره روی کرهٔ سماوی را که مرکز آن راصد است تعریف کردیم. چون فاصلهٔ ستاره‌ها در مقایسه با ابعاد زمین تقریباً بی‌نهایت بزرگ است، بنابرتعریف پیش گفته و به طوری که به سهولت از شکل 8 دیده می‌شود، میل یا فاصلهٔ قطبی ستاره مستقل از مکان راصد روی زمین است. در شکل 8، P_1CQ_1 محور چرخش، C مرکز زمین، O مکان راصد، و COZ جهت سمت‌الرأسی در O است؛ OP با CP_1 موازی است و OX جهت ستاره‌ای است که در O در حال عبور است. طبق تعریف، فاصلهٔ قطبی شمالی ستاره برای راصدی در O، $P\hat{O}X$ است. اگر CY به موازات OX رسم شود، آن‌گاه CY جهت ستاره

نسبت به مرکز زمین یعنی C است. در این صورت $P_1\hat{C}Y=P\hat{O}X$؛ به عبارت دیگر، فاصلهٔ قطبی شمالی ستاره (و در نتیجه میل آن) روی کرهٔ سماوی به مرکز O (یا هر مکان دیگری در روی زمین) با مقدار آن روی کرهٔ سماوی به مرکز C یکی است. امّا



تصویر 8

هنگامی که جرم آسمانی نسبتاً نزدیکی مانند ماه، خورشید، یا یک سیاره رصد می‌شود، تعریف فاصلهٔ قطبی شمالی (و بنابراین میل) که قبلاً داده شده است به مکان ویژهٔ راصد روی زمین بستگی دارد. بدین ترتیب اگر M نشان دهندهٔ ماه در فاصلهٔ r از مرکز زمین باشد (تصویر 8)، بدیهی است که $P\hat{O}M = P_1\hat{C}M + OMC$ ؛ و نیز OMC به مکان O بستگی دارد، در حالی که P_1CM اصلاً به O بستگی ندارد. $P_1\hat{C}M$ که زاویهٔ بین محور زمین و خط راست واصل بین مرکز زمین و جرم آسمانی است به عنوان فاصلهٔ قطبی شمالی M تعریف می‌شود. این تعریف کاملاً کلی است و در مورد تمام اجرام آسمانی به کار می‌رود. مرکز کرهٔ سماوی استاندارد (یا کرهٔ سماوی زمین – مرکز) در نقطهٔ C، یعنی مرکز زمین انتخاب می‌شود (تصویر 9 را نگاه کنید). CZ جهت سمت‌الرأسی راصد و قطر QCP بر محور زمین منطبق است. NWSE افق سماوی (دایرهٔ عظیمه‌ای که صفحهٔ آن بر CZ عمود است) و RWTE استوای سماوی (که صفحهٔ آن بر صفحهٔ استوای زمین منطبق) است. کمان PX، طبق تعریفی که در بالا داده شد، فاصلهٔ قطبی شمالی جرم آسمانی و DX میل δی آن ($NPD=90^o-\delta$) است. چنان که قبلاً تعریف شد، PZRSQ دایرهٔ نصف‌النهار راصد، ZX (که با z نشان داده می‌شود) فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم آسمانی، A (PZX) سمت، و H (ZPX) زاویهٔ ساعتی است. از این پس فرض می‌کنیم که مرکز کرهٔ سماوی، نقطهٔ C یعنی مرکز زمین است (شکل 9).



تصویر 9

حل مثلث کروی PZX

دو مسئله کلی را در ارتباط با مثلث کروی PZX در نظر می‌گیریم.

الف) عرض جغرافیایی Φ راصد و میل δ و زاویهٔ ساعتی H جرم آسمانی معلوم‌اند، فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت آن را تعیین کنید.

چون دو ضلع PZ و PX و زاویهٔ بین آن‌ها یعنی ZPX معلوم‌اند (تصویر 9)، داریم:

$$\cos ZX = \cos PZ \cos PX + \sin PZ \sin PX \cos ZPX$$

یا

$$\cos z = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos H$$

بدین ترتیب مقدار z را می‌توان مستقیماً از رابطهٔ بالا یا از فرمول هاورسینوس که در این حالت به صورت زیر نوشته می‌شود، محاسبه کرد:

$$\text{hav}\, z = \text{hav}(\Phi - \delta) + \cos \Phi \cos \delta\ \text{hav}$$

باز هم از رابطهٔ کسینوس داریم:

$$\cos PX = \cos PZ \cos ZX + \sin PZ \sin ZX \cos PZX$$

و یا

$$\sin \delta = \sin \Phi \cos z + \cos \Phi \sin z \cos A$$

که از این رابطه می‌توان سمت A را محاسبه کرد. رابطهٔ بالا را می‌توان به صورت هاورسینوس به صورت زیر نوشت:

$$\cos \Phi \cos a\ \text{hav}\, A = \text{hav}(90^o - \delta) - \text{hav}(\Phi - a)$$

که در آن a ارتفاع است.

ب) عرض جغرافیاییΦ راصد، فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره و سمت آن معلوم‌اند، زاویهٔ ساعتی و میل ستاره را تعیین کنید.

چون مقادیر Φ، z و A داده شده‌اند، از رابطهٔ قبل می‌توانیم میل را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی، H، از یکی از معادلات اول قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. از این‌رو داریم:

$$\cos H = \cos z \sec \Phi \sec \delta - \tan \Phi \tan \delta$$

اکنون مثلث کروی PZX را در تصویر 6 در نظر می‌گیریم. زاویه PZX سمت (شرقی) ستاره است. با توجّه به این‌که زاویهٔ ساعتی، در قطب، از دایرهٔ نصف‌النّهار راصد به طرف غرب اندازه‌گیری می‌شود، می‌بینیم که $ZPX = 24^h - H$. مثلث را مانند قبل حل می‌کنیم.

بُعد و میل

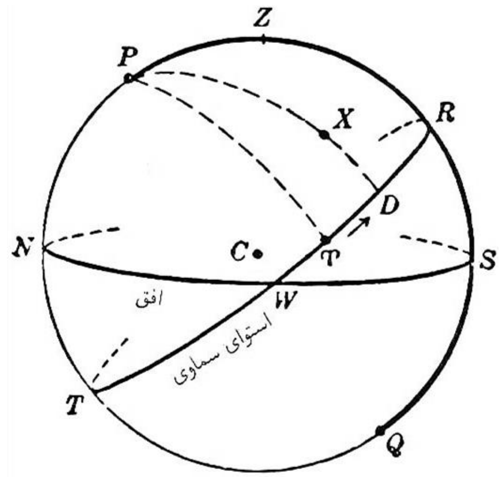
در تعیین مکان یک ستاره روی کرهٔ سماوی به روش زاویهٔ ساعتی و میل، فقط یک مختصه یعنی میل با حرکت ستاره در آسمان ثابت می‌ماند، در حالی‌که زاویهٔ ساعتی به طور یکنواخت از 0^h به 24^h افزایش می‌یابد. اما مکان ستاره‌ها روی کرهٔ سماوی را می‌توان به مکان به مکان نقاط ثابت روی سطح زمین تشبیه کرد و بنابراین مکان آن‌ها را می‌توان نسبت به استوای سماوی و ستارهٔ ویژه‌ای روی استوا مشخص کرد. برای مثال، فرض کنید در شکل 10، γ یک ستارهٔ استوایی و X ستارهٔ دیگری باشد؛ فرض کنید دایرهٔ نصف‌النّهاری که از X می‌گذرد استوای سماوی را در D قطع کند. می‌دانیم با تغییر مکان ستاره‌ها در آسمان، میل X، یعنی DX ثابت می‌ماند و در پیکربندی آن‌ها نیز تغییری روی نمی‌دهد. بنابراین γD ثابت است. به عبارت دیگر زاویهٔ بین نصف‌النّهاری γ و D ثابت می‌ماند. پس می‌توان نقطهٔ γ را به عنوان یک نقطهٔ مرجع روی استوای سماوی اختیار کرد. در این حالت، مکان ستارهٔ X را می‌توانیم نسبت به γ و استوای سماوی با کمان دایرهٔ عظیمه‌ای γD و میل DX به روشنی مشخص کنیم. نقطهٔ مرجعی که در عمل انتخاب می‌شود موسوم به **اعتدال بهاری** یا **نقطهٔ اول حمل** است و فرض این‌که مکان نقطهٔ γ به‌وسیلهٔ ستارهٔ ویژه‌ای در آسمان مشخص شود یک فرض مفید است. بعداً نقطهٔ γ را با دقّت بیشتری تعریف خواهیم کرد. کمان γD یا زاویهٔ $\gamma\hat{P}X$ بُعد (RA) ستارهٔ X (که با α نشان داده می‌شود) خوانده می‌شود و از نقطهٔ γ به طرف شرق از 0^h تا 24^h (در جهت پیکان نزدیک γ) اندازه‌گیری می‌شود. این خلاف جهتی است که در آن زاویهٔ ساعتی اندازه‌گیری می‌شود. از شکل 10 مشاهده می‌کنیم که $R\gamma = RD + \gamma D$. در این تصویر RD (یا $R\hat{P}X$) زاویهٔ ساعتی ستارهٔ X، یعنی H، و $R\gamma$ زاویهٔ ساعتی γ است. زاویهٔ ساعتی γ را زمان نجومی (ST) می‌نامند. بنابراین داریم:

$$ST = HAX + RAX$$

یا

$$ST = H + \alpha$$

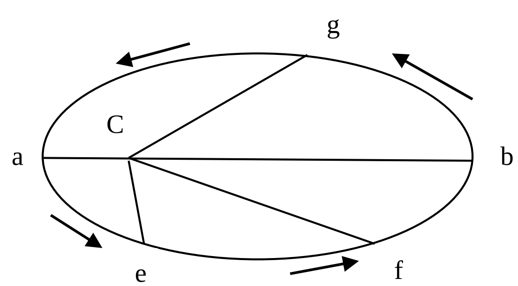
هنگامی‌که γ روی دایرهٔ نصف‌النّهار راصد است، زاویهٔ ساعتی γ برابر 0^h، یعنی زمان نجومی 0^h است. وقتی γ دوباره روی نصف‌النّهار راصد قرار می‌گیرد، زمانی برابر 24^h ساعت زمان نجومی سپری شده است. البته این بازهٔ زمانی برابر همان مدت زمانی است که برای یک چرخش کامل زمین حول محورش لازم است و یک **روز نجومی** خوانده می‌شود. در واقع زمین چرخان یک زمان‌شمار استاندارد است.



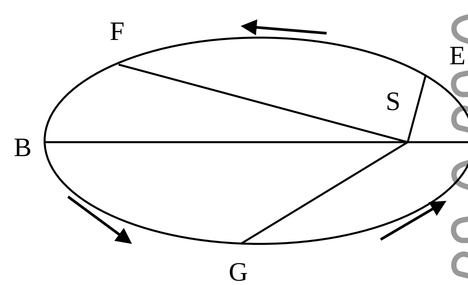
تصویر 10

مدار زمین

زمین روی مدار بیضی شکل به دور خورشید می‌گردد و خورشید در یک کانون بیضی، S واقع است (تصویر 11). [همان‌طور که در درس‌نامهٔ اول ذکر شد] این، قانون اول حرکت سیاره‌ای کپلر است. زمان لازم برای یک گردش کامل زمین بر روی مدارش یک سال است. با پیشروی زمین در مدارش، جهت آن از دیدگاه خورشید پیوسته تغییر می‌کند، لیکن سرعت زاویه‌ای آن یکنواخت نیست. چون رصدهای ما از زمین انجام می‌گیرد به نظر می‌رسد که خورشید، نسبت به زمین و حول آن یک مدار بیضی طی می‌کند. در تصویر 12 نقطهٔ C مرکز زمین، و مسیر بیضی مدار *ظاهری* خورشید را نسبت به زمین نشان می‌دهد. سلسله مکان‌های خورشید در این مدار یعنی a، e، f، b، g نظیر سلسله مکان‌های زمین در مدارش به دور خورشید، یعنی A، E، F،B و G هستند (تصویر 11). بدین ترتیب به نظر می‌رسد که خورشید در طول یک سال مدار کاملی را در آسمان نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها طی می‌کند. صفحهٔ این مدار را **صفحهٔ دایره‌البروج** می‌نامند و دایرهٔ عظیمه‌ای که از برخورد این صفحه با کرهٔ سماوی به مرکز C (مرکز زمین) درست می‌شود را **دایره‌البروج** می‌نامند.



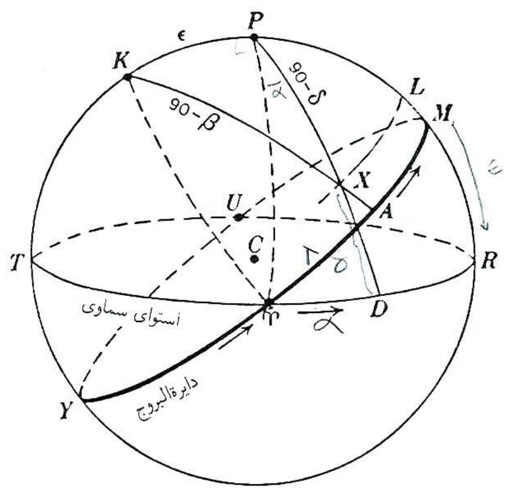
تصویر 12



تصویر 11

در تصویر 13، فرض کنید نقطهٔ C مرکز کرهٔ سماوی باشد که بر آن استوای سماوی TγR و قطب شمال P نیز رسم شده‌اند. ممکن است تصور کنیم که ستاره‌ها را می‌شود از مرکز زمین، یعنی از نقطهٔ C، نگاه کرد، که در آن صورت مکان‌های

معینی را روی کرهٔ سماوی اشغال می‌کنند. صفحهٔ دایره‌البروج مکان معینی نسبت به ستاره‌ها دارد، در نتیجه دایره‌البروج دایرهٔ عظیمهٔ ویژه‌ای است که طبق مشاهدات با استوای سماوی زاویه‌ای تقریباً برابر $23\ ^{1}/_{2}\ ^{o}$ می‌سازد. در تصویر 13، دایرهٔ عظیمهٔ $Y\gamma MU$ نمایندهٔ دایره‌البروج و $M\gamma R$ میل آن نسبت به استوای سماوی است که **میل دایره‌البروج** نامیده می‌شود. به ظاهر خورشید نسبت به زمین روی کرهٔ سماوی در امتداد دایره‌البروج (در جهت $Y\gamma M$) حرکت می‌کند و در یک سال دو بار مکان آن روی کرهٔ سماوی بر نقاط برخورد دایره‌البروج و استوای سماوی، یعنی نقاط U و γ ، منطبق می‌شود. از γ تا M و از M تا U خورشید در طرف قطب شمال استوا است و بنابر این میل آن شمالی است. همین‌طور از U تا Y و از Y تا γ میل خورشید جنوبی است. نقطهٔ γ ، که در آن میل خورشید از جنوبی به شمالی تغییر می‌کند، نقطهٔ *اعتدال بهاری* نامیده می‌شود. از همین روش نقطهٔ مرجع γ را که بعد ستاره‌ها نسبت به آن سنجیده می‌شود پیدا می‌کنند. بدین ترتیب اگر X یک ستاره باشد، بُعد آن γD یا α است که در راستای استوا از γ به طرف شرق اندازه‌گیری می‌شود و میل آن، δ، برابر DX است. از نمودار دیده می‌شود که بُعد و میل خورشید، هر دو پیوسته تغییر می‌کنند. هنگامی که خورشید در γ است بُعد و میل آن، هر دو صفرند (این وضع، که به اعتدال بهاری، معروف است درست در لحظهٔ تحویل سال ایرانی، یعنی اوّل فروردین رخ می‌دهد)؛ در M بُعد خورشید 6^{h} و میل آن تقریباً $23\ ^{1}/_{2}\ ^{o}\ N$ است (این حالت، به انقلاب تابستانی معروف است)؛ در U بُعد خورشید 12^{h} و میل آن 0^{o} است (این وضع، به اعتدال پاییزی معروف است)؛ و در Y بُعد خورشید 18^{h} و میل آن تقریباً $23\ ^{1}/_{2}\ ^{o}\ S$ است (این وضع، به انقلاب تابستانی معروف است).



تصویر 11

عرض و طول سماوی

در تعیین مکان یک جرم آسمانی می‌توان دایره‌البروج را به عنوان دایرهٔ عظیمهٔ بنیادی و نقطهٔ اعتدال بهاری γ را به عنوان نقطهٔ مرجع اصلی به کار برد. در تصویر 13، K قطب شمال دایره‌البروج و KXA کمان دایرهٔ عظیمه‌ای است که از X می‌گذرد و

دایره‌البروج را در A قطع می‌کند. کمان γA که از γ به A در راستای دایره‌البروج درجهت حرکت سالیانهٔ خورشید، یعنی به سوی شرق 0^o تا 360^o اندازه‌گیری می‌شود طول سماوی نام دارد. کمان AX عرض سماوی X است؛ عرض سماوی شمالی مثبت، و عرض سماوی جنوبی منفی در نظر گرفته می‌شود. اگر بُعد و میل ستاره معلوم باشند، از مثلث KPX می‌توانیم عرض سماوی (β) و طول سماوی (λ) آن را به دست آوریم و برعکس. حال چون γ قطب دایرهٔ عظیمهٔ $KPMR$ است، پس داریم $K\hat{P}\gamma=90^o$ و چون داریم $\gamma D=\gamma\hat{P}X=\alpha$ ، بنابراین $K\hat{P}X=90^o+\alpha$. همچنین $P\hat{K}\gamma=90^o$ ، و چون $\gamma A=\gamma\hat{K}X=\lambda$ ، پس $P\hat{K}X=90^o-\lambda$. همچنین $PX=90^o-\delta$ و داریم $KX=90^o-\beta$. فرض کنید ε میل دایره‌البروج باشد؛ این زاویه بین شعاع‌های CM و CR واقع است، بنابراین $RM=\varepsilon$. امّا $KM=90^o$ و $PR=90^o$، از این‌رو $KP=\varepsilon$. با به کار بردن فرمول‌های کسینوس، داریم:

$$\cos KX = \cos PX \cos KP + \sin PX \sin KP \cos KPX$$

$$\sin KX \sin PKX = \sin PX \sin KPX$$

$$\sin KX \cos PKX = \cos PX \sin KP - \sin PX \cos KP \cos KPX$$

و یا می‌توانیم به این شکل بنویسیم:

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha$$

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha$$

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$

به همین ترتیب، بُعد α و میل δ را می‌توان بر حسب β، λ و ε بیان کرد. روابط مربوط عبارتند از:

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$

$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

طلوع و غروب

شکل 14 را در نظر بگیرید. وقتی جرم آسمانی X در نقطهٔ F به افق می‌رسد می‌گویند در این نقطه غروب می‌کند. در این موقع فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن 90^o است، یعنی $ZF=90^o$. فرض کنید H زاویهٔ ساعتی X به هنگام غروب آن باشد، طوری که $ZPF=H$. همچنین $PF = 90^o - \delta$. فرض کنید Φ عرض جغرافیایی محل و A سمت X (PZF) به هنگام غروب باشد. از رابطه کسینوس، داریم:

$$\cos ZF = \cos PZ \cos PF + \sin PZ \sin PF \cos ZPF$$

یا

$$\cos 90^o = \sin\Phi\sin\delta + \cos\Phi\cos\delta\cos H$$

بنابراین، چون $\cos 90^o=0$ است، خواهیم داشت:

$$\cos H = -\tan\Phi\tan\delta$$

که از این رابطه می‌توان زاویهٔ ساعتی جرم را به هنگام غروب آن محاسبه کرد. باز هم از رابطه کسینوس داریم:

$$\cos PF = \cos PZ \cos ZF + \sin PZ \sin ZF \cos PZF$$

$$\sin \delta = 0 + \cos \Phi \cos A$$

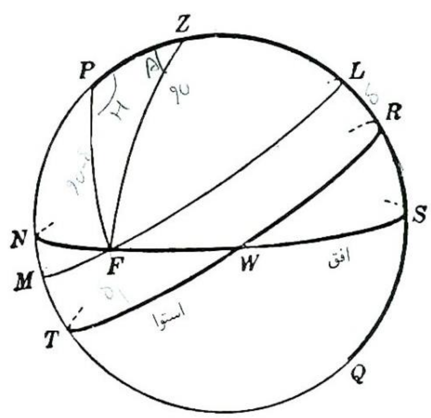
و در نهایت داریم:

$$\boxed{\cos A = \sin \delta \sec \Phi}$$

که از آن می‌توان سمت جرم را به هنگام غروب تعیین کرد.

از دو معادله بالا و یا از شکل 14 می‌شود دید که در عرض‌های شمالی، اگر میل جرم آسمانی شمالی باشد زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب بین 6^h و 12^h و سمت آن کم‌تر از 90^o است (به عبارت دیگر، جرم آسمانی بین غرب و شمال غروب می‌کند)؛ و اگر میل جرم آسمانی جنوبی باشد، زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب بین 0^h و 6^h است و بین جنوب و غرب غروب می‌کند. با همین روش می‌توان مسئلهٔ مربوط به طلوع جرم آسمانی را بررسی کرد. هنگامی که عرض جغرافیایی راصد جنوبی باشد نیز روند کار مانند بالاست.

رابطه بالا نشان می‌دهد که اگر $\Phi > 90^o - \delta$ باشد، مقدار عددی $\cos H$ بزرگ‌تر از یک خواهد بود به طوری که این معادله نمی‌تواند مقداری برای H به دست دهد. در این حالت، خورشید در آن عرض‌ها و در آن روزهایی که $\Phi > 90^o - \delta$ است غروب نمی‌کند؛ چیزی که صحت آن را در یک نمودار نیز می‌توان نشان داد. در روز اول تابستان، میل شمالی خورشید بیشینه، یعنی تقریباً برابر $23\ {}^1/_2{}^o$ شمالی است، بنابراین خورشید در آن روز در عرض‌های جغرافیایی $66\ {}^1/_2{}^o$ شمالی بی آن‌که غروب کند بالای افق می‌ماند (خورشید نیمه شب). در قطب شمال، چون $\Phi > 90^o - \delta$ است خورشید از اول فروردین تا اول مهر که δ شمالی است، همواره بالای افق است و شش ماه باقیمانده را زیر افق است. مدار $66\ {}^1/_2{}^o$ شمالی، مدار شمالگان و همانند آن در نیم‌کرهٔ جنوبی ($66\ {}^1/_2{}^o$ جنوبی) را مدار جنوبگان می‌نامند.



تصویر 12